دروس الرياضيات جدع مشترك علوم -تيديلي -نيابة أزيلال

ذ.مدني إسماعيل

21 فبراير 2015

المحتويات

الحساب المثلثي

I وحدات قياس الزوايا

I -1 نشاط تذكيري

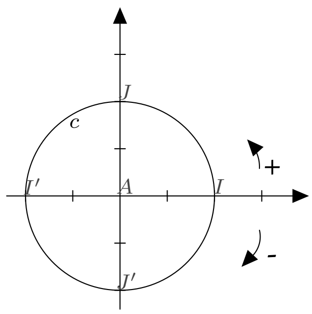
نعتبر المثلث AOB قائم الزاوية في A حيث $OA = 3$ و $AB = 4$

1. أحسب OB
2. أحسب$sin(\widehat{AOB})$ ثم $cos(\widehat{AOB})$
3. إستنتج $tan(\widehat{AOB})$

I -2 تعريف الدائرة المثلثية

الدائرة المثلثية هي دائرة مركزها O و شعاعها 1 مزودة بمقطة I تسمى أصل الدائرة و موجهة توجيها موجبا (مباشر: عكس عقارب الساعة)

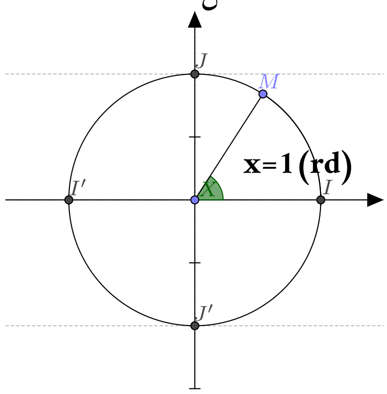
شكل1 :



I -3 تعريف الراديان

نعتبر الدائرة المثلثية C و I أصلها و M نقطة من الدائرة قياس الزاوية الهندسية $\widehat{IOM}$ بالراديان (rd) هو الطول 1 للقوس أي أن 1rd هو قياس زاوية تحصر قوسا على الدائرة المثلثية طوله 1

شكل 2:



I -4 تناسب وحدات قياس الزوايا

هناك ثلاث وحدات قياس الزوايا هي الدرجة و الراديان و الغراد, قياس زاوية مستقيمية هو $180°$ أما بالراديان فهو π و أما بالغراد فهو $200gr$

I -5 خاصية

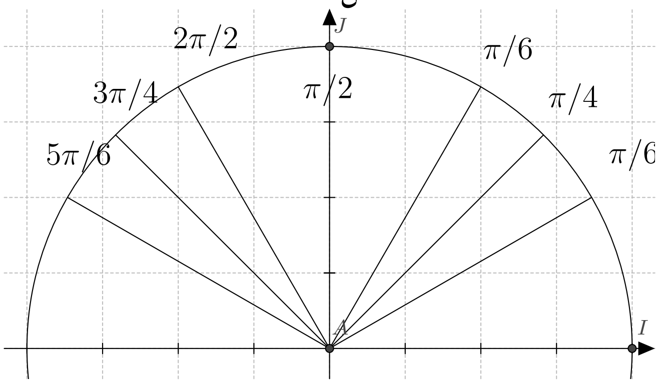
إذا كان x قياس زاوية بالدرجة و y قياس زاوية بالراديان و z قياس زاوية بالغراد فإن: $\frac{x}{180} = \frac{y}{\pi} = \frac{z}{200}$

I -6 جدول تناسب وحدات القياس

إملأ الجدول التالي

130°	150°	135°	120°	90°	60°	45°	30°	0	x°
									y(rd)

شكل 3 :



II الأفاصيل المنحنية

II -1 تعريف

نعتبر الدائرة المثلثية C و I أصلها و M نقطة من الدائرة C
عندما تنطلق النقطة M من I و تدور حول الدائرة في الاتجاه الموجب أو في الاتجاه السالب فإن قياس (بالراديان) للزاوية الهندسية $\widehat{IOM}$ يسمى أفصول منحنى للنقطة M و نكون قد قمنا بمعلمة النقطة M على الدائرة المثلثية

II -2 أمثلة

- عندما تدور النقطة M من I في المنحى الموجب و تتوقف للمرة الأولى في النقطة J فإن العدد $x = \dfrac{\pi}{2}$
- عندما تدور النقطة M من I في المنحى الموجب و تتوقف للمرة الثانية في النقطة J فإن العدد $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$ أفصولا منحنيا لهاأفصولا منحنيا لها

II -3 خاصية

إذا كان العدد $x \in]-\pi;\pi]$ أفصولا منحنيا فإن العدد $x + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$ أيضا أفصولا منحنيا للنقطة M
العدد x يسمى الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة M

II -4 تمرين تطبيقي

1. حدد الأفصول المنحني الرئيسي للنقطتين ذواتي الأفصولين المنحنيين : $\dfrac{17\pi}{4}$ و $\dfrac{-21\pi}{4}$
2. مثل على الدائرة المثلثية النقط : $A(\dfrac{\pi}{4})$ و $B(\dfrac{-\pi}{4})$ و $C(\dfrac{17\pi}{4})$ و $D(\dfrac{-3\pi}{4})$ و $E(\dfrac{-21\pi}{4})$

II -5 خاصية

العددان x و y أفصولا منحنيا لنفس النقطة إذا وفقط إذا كان $x - y = 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

II -6 تمرين تطبيقي

هل الأفصولين x و y التاليان يمثلان نفس النقطة على الدائرة المثلثية $x = \dfrac{65\pi}{12}$ و $y = \dfrac{-7\pi}{12}$

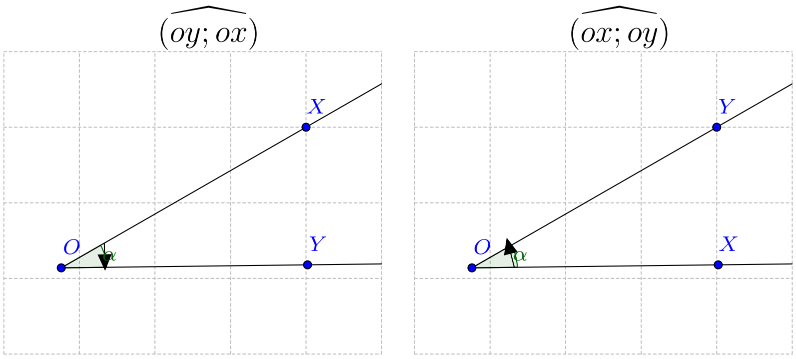
III الزوايا الموجهة لنصفي مستقيمين–الزاوية الموجهة لمتجهتين

III –1 الزوايا الموجهة لنصفي مستقيمين

III –1–1 تعريف

ليكن $[ox)$ و $[oy)$ نصفي مستقيمين لهما نفس الأصل الزوج $([ox);[oy))$ يحدد زاوية موجهة لنصفي مستقيمين نرمز لها بالرمز $(\widehat{ox;oy})$

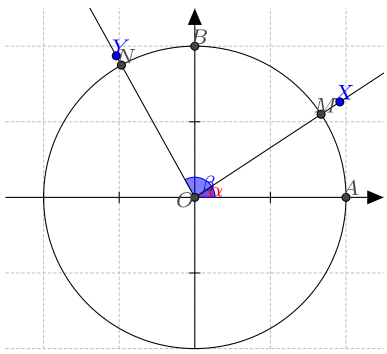
شكل 4:



III –1–2 قياس زاوية موجهة لنصفي مستقيمين–القياس الرئيسي

لتكن $(\widehat{ox;oy})$ زاوية موجهة لنصفي مستقيمين و C الدائرة المثلثية التي مركزها O و $(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ المعلم المرتبط بها
M و N نقطتا تقاطع $[ox)$ و $[oy)$ على التوالي مع الدائرة المثلثية C
ليكن α و β أفصولين منحنيين للنقطتين M و N على التوالي

شكل 5:



- **تعريف**

قياسات الزاوية الموجهة $(\widehat{ox;oy})$ هي الأعداد الحقيقية $\beta-\alpha+2k\pi;k\in\mathbb{Z}$

- **ترميز**

نرمز ب $(\overline{ox;oy})$ لأحد قياسات الزاوية الموجهة $(\widehat{ox;oy})$ و نكتب $(\overline{ox;oy})=\alpha+2k\pi;k\in\mathbb{Z}$ أو $(\overline{ox;oy})\equiv$ $\alpha[2\pi];k\in\mathbb{Z}$ و نقرأ قياس الزاوية $(\widehat{ox;oy})$ يوافق α بترديد 2π

- **خاصية**

من بين قياسات زاوية موجهة لنصفي مستقيمين يوجد قياس وحيد ينتمي إلى $]-\pi;\pi]$ يسمى القياس الرئيسي

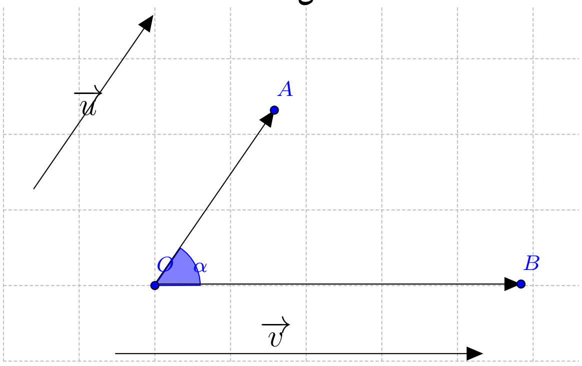
III -2 الزاوية الموجهة لمتجهتين

المستوى (P) موجه توجها مباشرا و O نقطة من (P) , لتكن $\overrightarrow{U}$ و $\overrightarrow{V}$ متجهتين غير منعدمتين
توجد نقطة وحيدة A من المستوى (P) بحيث $\overrightarrow{U}=\overrightarrow{OA}$ و توجد نقطة وحيدة B من المستوى (P) بحيث $\overrightarrow{V}=\overrightarrow{OB}$

- **تعريف**

الزاوية الموجهة للمتجهتين $\overrightarrow{U}$ و $\overrightarrow{V}$ هي الزاوية الموجهة $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}})$ و يرمز لها ب $(\widehat{\overrightarrow{U};\overrightarrow{V}})$

شكل 6:



- **ملحوظة**

إذا كان α هو قياس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\widehat{\overrightarrow{U};\overrightarrow{V}})$ فإن كل عدد من الأعداد $\alpha+2k\pi; k\in\mathbb{Z}$ هو قياس لنفس الزاوية و نكتب $(\widehat{\overrightarrow{U};\overrightarrow{V}})=\alpha+2k\pi; k\in\mathbb{Z}$ أو $(\widehat{\overrightarrow{U};\overrightarrow{V}})\equiv\alpha[2\pi]; k\in\mathbb{Z}$

III -3 علاقة شال

لتكن $\overrightarrow{U}$ و $\overrightarrow{V}$ و $\overrightarrow{W}$ ثلاث متجهات غير منعدمة لدينا : $(\widehat{\overrightarrow{U};\overrightarrow{V}})+(\widehat{\overrightarrow{V};\overrightarrow{W}})=(\widehat{\overrightarrow{U};\overrightarrow{W}})$

- **نتائج:زوايا مرتبطة بالزاوية الموجهة**

  - **زوايا متقابلة:**
  $$(\widehat{\overrightarrow{U};\overrightarrow{V}})\equiv-(\widehat{\overrightarrow{V};\overrightarrow{U}})[2\pi]$$
  - **زوايا متقاسية:**
  $$(\widehat{\overrightarrow{U};\overrightarrow{V}})\equiv(\widehat{-\overrightarrow{U};-\overrightarrow{V}})[2\pi]$$
  - **زوايا متتامة:**
  $$(\widehat{-\overrightarrow{V};\overrightarrow{U}})\equiv\pi-(\widehat{\overrightarrow{U};\overrightarrow{V}})[2\pi]$$
  $$(\widehat{-\overrightarrow{V};\overrightarrow{U}})\equiv\pi+(\widehat{\overrightarrow{V};\overrightarrow{U}})[2\pi]$$

III -4 تمرين تطبيقي

ABC مثلث متساوي الأضلاع بحيث $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$
ACD و AEB مثلثان قائما الزاوية على التوالي في E و D متساويا الساقين

1. أنشيء شكلا مناسبا
2. حدد بالراديان القياس الرئيسي لكل من الزوايا التالية $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA})$ و $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD})$ و $(\overrightarrow{EA};\overrightarrow{BC})$

IV النسب المثلثية

IV -1 جيب و جيب تمام ضل عدد حقيقي

IV -1-1 نشاط

لتكن C الدائرة المثلثية مرتبطة بالمعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ و M نقطة من الدائرة ذات الأفصول المنحني α و $(x;y)$ زوج إحداثيات النقطة في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$

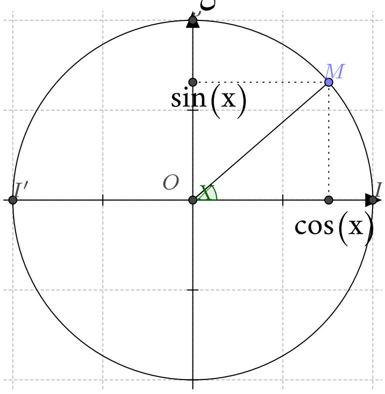
1. أحسب $cos(\alpha)$ بدلالة x
2. أحسب $sin(\alpha)$ بدلالة x
3. أكتب $\overrightarrow{OM}$ بدلالة $cos(\alpha)$ و $sin(\alpha)$ و $\vec{i}$ و $\vec{j}$
4. أحسب المسافة OM

IV -1-2 تعريف

لتكن C الدائرة المثلثية و مرتبطة بالمعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ و M نقطة من الدائرة ذات الأفصول المنحني x و

1. أفصول النقطة M على محور الأفاصيل يسمى جيب تمام العدد x ونرمز له ب $cos(x)$
2. أرتوب النقطة M على محور الأراتيب يسمى جيب العدد x ونرمز له ب $sin(x)$

شكل 7:



IV -1-3 خاصية

$$\boxed{cos^2(x)+sin^2(x)=1}$$

IV -1-4 تمرين تطبيقي

حدد على الدائرة المثلثية إحداثيات النقط التالية : I و J و J' و I'

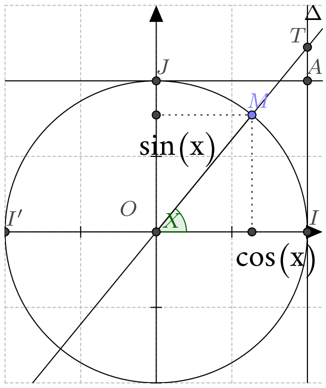
IV -2 ظل عدد حقيقي

IV -2-1 تعريف

لتكن C الدائرة المثلثية المرتبطة بالمعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ و M نقطة من الدائرة ذات الأفصول المنحني x و $(cos(x);sin(x))$ زوج إحداثيات النقطة M في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ و (Δ) المستقيم المماس للدائرة C في I و A المسقط العمودي للنقطة J على (Δ) و T نقطة تقاطع المستقيم (OM) و (Δ)

نسب المستقيم (Δ) إلى المعلم $(I;A)$
أفصول النقطة T بالنسبة للمعلم $(I;A)$ يسمى ظل العدد الحقيقي x و نرمز له بالرمز $tan(x)$

شكل 8:



IV -2-2 خاصية

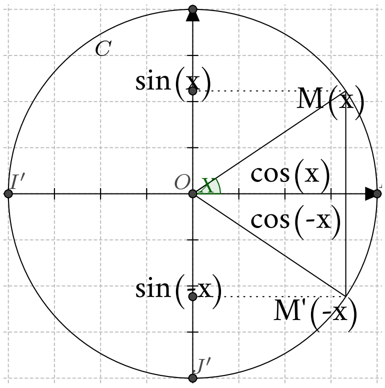
لكل عدد حقيقي x يخالف $\frac{\pi}{2}+k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$ لدينا: $tanx=\frac{sinx}{cosx}$ و
$$1+tan^2x=\frac{1}{cos^2x}=\frac{1}{1-sin^2x}$$

V العلاقة بين النسب المثلثية

V -1 العلاقة بين $M(x)$ و $M'(-x)$ المتماثلتان بالنسبة لمحور الأفاصيل

لتكن $M(x)$ و $M'(-x)$ نقطتان على الدائرة C $M(x)$ و $M'(-x)$ متماثلتان بالنسبة لمحور الأفاصيل :

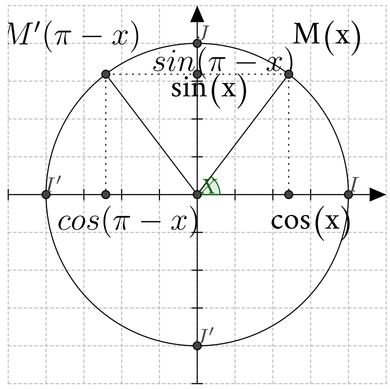
$$\cos(-x) = \cos(x) \text{ و } \sin(-x) = -\sin(x) \text{ و } \tan(-x) = -\tan(x)$$



V -2 العلاقة بين $M(x)$ و $M'(\pi - x)$ المتماثلتان بالنسبة لمحور الأراتيب

لتكن $M(x)$ و $M'(\pi - x)$ نقطتان على الدائرة C $M(x)$ و $M'(\pi - x)$ متماثلتان بالنسبة لمحور الأراتيب

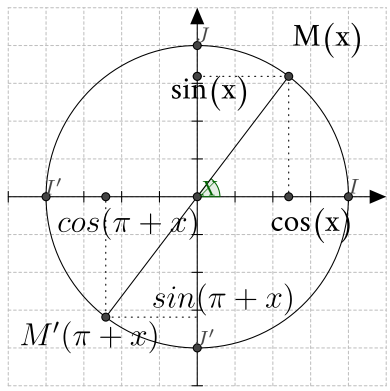
$$\cos(\pi - x) = -\cos(x) \text{ و } \sin(\pi - x) = \sin(x) \text{ و } \tan(\pi - x) = -\tan(x)$$



V -3 العلاقة بين $M(x)$ و $M'(\pi + x)$ المتماثلتان بالنسبة للمركز

لتكن $M(x)$ و $M'(\pi + x)$ نقطتان على الدائرة C $M(x)$ و $M'(x)$ متماثلتان بالنسبة المركز لدينا :

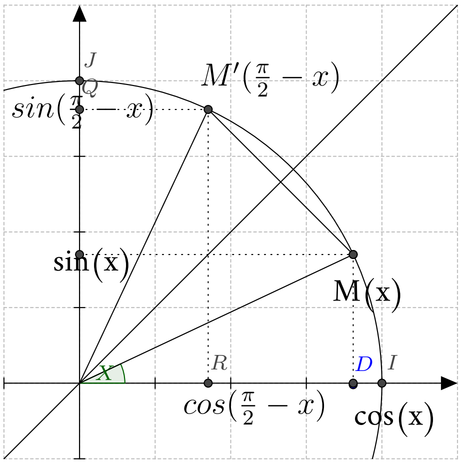
$$\cos(\pi + x) = -\cos(x) \text{ و } \sin(\pi + x) = -\sin(x) \text{ و } \tan(\pi + x) = \tan(x)$$



V -4 العلاقة بين $M(x)$ و $M'(\frac{\pi}{2}-x)$

لتكن $M(x)$ و $M'(\frac{\pi}{2}-x)$ نقطتان على الدائرة C و $M(x)$ و $M'(x)$ متماثلتان بالنسبة للمستقيم $(\Delta): y=x$ لدينا :

$$cos(\frac{\pi}{2}-x)=sin(x) \text{ و } sin(\frac{\pi}{2}-x)=cos(x) \text{ و } tan(\frac{\pi}{2}-x)=\frac{1}{tan(x)}$$



V -5 العلاقة بين $M(x)$ و $M'(\frac{\pi}{2}+x)$

لتكن $M(x)$ و $M'(\frac{\pi}{2}+x)$ نقطتان على الدائرة C لدينا :

$$cos(\frac{\pi}{2}+x)=-sin(x) \text{ و } sin(\frac{\pi}{2}+x)=cos(x) \text{ و } tan(\frac{\pi}{2}+x)=\frac{-1}{tan(x)}$$